10.3.11 Výpočet určitých integrálů I

Předpoklady: 10310

Výsledek minulé hodiny:

Určitý integrál: $\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^2}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow$ obsah plochy pod částí paraboly od 1 do 3 je $\frac{26}{3}$.

nejde o nic jiného než určení neurčitého integrálu a dosazení do něj $\Rightarrow$ můžeme postupovat tak, že spočítáme neurčitý integrál a dosadíme do něj

Př. 1: Vypočti:

a) $\int_0^\pi \sin x\,dx$ b) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx$ c) $\int_1^2 \left(2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

a) $\int_0^\pi \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\left(\cos\pi - \cos 0\right) = -\left(-1-1\right) = 2$

b) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \left[x^3 + x^2 + x\right]_1^2 = \left(2^3 + 2^2 + 2\right) - \left(1^3 + 1^2 + 1\right) = 11$

c) $\int_1^2 \left(2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \left(2 + x^{\frac{1}{2}} + x^{-2}\right) dx = \left[2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \left[2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 =$

$= \left(2\cdot 2 + \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{1}{2}\right) - \left(2\cdot 1 + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{1}\right) = 4 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{11}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Existují věty, které v některých případech umožňují zpřehlednit (někdy i zjednodušit) výpočet určitých integrálů:

Nechť f_1, f_2 jsou v intervalu *I* spojité funkce, *a*, *b* nechť jsou libovolné body z *I* a c_1, c_2 libovolné konstanty. Potom platí: $\int_a^b \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x_2)\right] dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f(x_2)\,dx$.

$\Rightarrow$ stejně jako u výpočtu neurčitých integrálů můžeme integrály trhat podle sčítání a vytýkat před integřítka konstanty a takto zjednodušené integrály počítat zvlášť.

Př. 2: Vypočti:

a) $\int_0^2 \left(3x^2 + 4x - 1\right) dx$ b) $\int_{-1}^1 \left(4x^3 - 2x + \sqrt{2}\right) dx$ c) $\int_1^2 \left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) dx$

a)

$$\int_0^2 \left(3x^2+4x-1\right)dx = 3\int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 1\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[x\right]_0^2 =$$

$$= 3\left(\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+4\left(\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)-\left(2-0\right) = 3\cdot\frac{8}{3}+4\cdot\frac{4}{2}-2 = 14$$

b)

$$\int_{-1}^1 \left(4x^3-2x+\sqrt{2}\right)dx = 4\int_{-1}^1 x^3\,dx - 2\int_{-1}^1 x\,dx + \sqrt{2}\int_{-1}^1 1\,dx = 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + \sqrt{2}\left[x\right]_{-1}^1 =$$

$$= 4\left[\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]-2\left[\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right]+\sqrt{2}\left[1-(-1)\right] = 4\cdot 0-2\cdot 0+\sqrt{2}\cdot 2 = 2\sqrt{2}$$

c)

$$\int_1^2 \left(2\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)dx = 2\int_1^2 \sqrt[3]{x^2}\,dx - 3\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = 2\int_1^2 x^{\frac{2}{3}}\,dx - 3\int_1^2 x^{-3}\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_1^2 - 3\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = 2\left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right]_1^2 - 3\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{6}{5}\left(\sqrt[3]{2^5}-\sqrt[3]{1^5}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\sqrt[3]{32}-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{6}{5}\sqrt[3]{32}-\frac{6}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{5}\sqrt[3]{32}-\frac{6}{5}-\frac{9}{8} = \frac{6}{5}\sqrt[3]{32}-\frac{93}{40}$$

Při výpočtu můžeme zaměnit meze integrálu: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Př. 3: Ověř platnost předchozí věty na výpočtu integrálu $\int_1^2 \left(3x^2-e^x\right)dx$.

$$\int_1^2 \left(3x^2-e^x\right)dx = \left[3\frac{x^3}{3}-e^x\right]_1^2 = \left[x^3-e^x\right]_1^2 = \left(2^3-e^2\right)-\left(1^3-e^1\right) = 7-e^2+e$$

$$-\int_2^1 \left(3x^2-e^x\right)dx = -\left[3\frac{x^3}{3}-e^x\right]_2^1 = -\left[x^3-e^x\right]_2^1 = -\left[\left(1^3-e^1\right)-\left(2^3-e^2\right)\right] = 7-e^2+e$$

Výpočet integrálu můžeme také rozdělit pomocí mezí:

Věta o aditivnost určitého integrálu:

Je-li funkce *f* spojitá v intervalu *I*, který obsahuje libovolně položené body *a*, *b*, *c* pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ větu požíváme, když není možné integrovat v celém intervalu najednou.

Př. 4: Vypočti $\int_{-1}^2 |x|\,dx$.

Nikde jsme si neříkali, jak integrovat absolutní hodnotu, ale už v prvním ročníku jsme se učili, jak ji můžeme nahradit pomocí lineárních funkcí:

- $x \in \left(-\infty; 0\right\rangle \;\Rightarrow\; |x| = -x$
- $x \in \left\langle 0; \infty\right) \;\Rightarrow\; |x| = x$

stejným způsobem můžeme rozdělit i výpočet integrálu:

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Př. 5: Petáková:
strana 165/cvičení 92 d) f) j)
strana 165/cvičení 93
strana 165/cvičení 96

Shrnutí: Výpočty určitého integrálu můžeme provádět analogicky s výpočty neurčitých integrálů.